3.1 Bentuk-bentuk non dimensional dari persamaan fluida

Persamaan-persamaan fluida dapat ditulis dalam bentuk nondimensional. Untuk itu, pertama-tama kita definisikan variabel yang tidak berdimensi dibawah ini :

$$\tilde{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_o} \;\;,\; \underline{\tilde{u}} \equiv \frac{\underline{u}}{u_o} \;\;,\; \tilde{p} \equiv \frac{p-p_o}{\rho_o u_o^2} \;\;,\; \tilde{T} \equiv \frac{T}{T_o} \;\;,\; \tilde{t} \equiv \frac{tu_o}{L_0} \;\;,\; \underline{\underline{\tilde{\tau}}} \equiv \frac{L_o}{\mu_o u_o}\underline{\underline{\tau}} \;\;,$$

$$\underline{\tilde{x}} \equiv \frac{\underline{x}}{L_o} \;\;,\; \tilde{k} \equiv \frac{k}{k_o} \;\;,\; \tilde{C}_p \equiv \frac{C_p}{C_{po}} \;\;,\; \underline{\tilde{G}} \equiv \frac{\underline{G}}{g_o} \;\;,\; \underline{\tilde{\beta}} \equiv \frac{\underline{\beta}}{\beta_o}$$

Variabel-variabel di atas yang ber*subscript* "o" adalah variabel-variabel acuan, misalnya u_o adalah kecepatan *"freestream", L_o* adalah panjang dari benda (*chord length* dari airfoil) dan lain-lain. Untuk kuantitas τ dan t tidak diberikan variabel karakteristik acuan khusus. τ dinon-dimensionalkan menggunakan variabel acuan L_o, u_o, dan μ_o, karena memang tidak pernah ada variabel acuan untuk kuantitas ini. Untuk waktu t, biasanya memang tidak ada waktu karakteristik dalam suatu permasalahan, kecuali untuk kasus tertentu di mana terdapat karakteristik frekuensi (kasus ini akan kita bahas nanti). Tekanan p dinon-dimensionalkan sedikit berbeda. Untuk p kita ambil selisih dari tekanan dengan tekanan acuan, karena p muncul di persamaan momentum sebagai gradien. Karena sudah ada p_o di numerator, maka kita normalisasi dengan menggunakan ρ_o dan u_o.

Sekarang apabila kita ganti variabel-variabel misalnya $\rho = \tilde{\rho}\rho_o$, dan seterusnya kedalam persamaan (a) dan (b), maka kita dapatkan :

$$\boxed{\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} + \tilde{\rho}\left(\tilde{\nabla}.\underline{\tilde{u}}\right) = 0} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\tilde{a})$$

$$\boxed{\tilde{\rho}\frac{d\underline{\tilde{u}}}{d\tilde{t}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \frac{1}{R_e}\tilde{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tilde{\tau}}} + \frac{1}{F_r}\tilde{\rho}\tilde{G}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\tilde{b})$$

di mana

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial}{L_o \partial \underline{\tilde{x}}} = \frac{1}{L_o}\tilde{\nabla}\,.$$

Untuk persamaan energi, kita akan menggunakan persamaan (*i*) dan kita akan lakukan ini untuk kasus besar Q = 0. Apabila kita subsitusikan variabel di atas ke dalam persamaan ini dan hasilnya lalu dimanipulasi seperti sebelumnya, maka akan didapat

$$\boxed{\tilde{\rho}\tilde{C}_p \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{P_r R_e}\tilde{\nabla}\cdot\left(\tilde{k}\tilde{\nabla}\tilde{T}\right) + \frac{E_c}{R_e}\left(\underline{\underline{\tilde{\tau}}}\cdot\tilde{\nabla}\right)\cdot\underline{\tilde{u}} - E_c B_\beta \tilde{\beta}\tilde{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{t}}}} \quad \ldots\left(\tilde{c}\right)$$

di mana :

$E_c \equiv \dfrac{u_o^2}{Cp_o T_o}$ *(Bilangan Eckert),* $R_e \equiv \dfrac{\rho_o u_o L_o}{\mu_o}$ *(Bilangan Reynolds),*

$F_r \equiv \dfrac{u_o^2}{g_o L_o}$ *(Bilangan Froude),* $P_r \equiv \dfrac{C_{Po}\mu_o}{k_o}$ *(Bilangan Prandtl),*

$B_\beta \equiv \beta_o T_o$ *(Bilangan Ekspansi termal)*

Parameter-parameter non-dimensional ini mempunyai arti fisik yang sangat penting. Perlu diingat bahwa parameter *Re* dan *Fr* didapat dengan cara membagi koefisien setiap suku dalam persamaan momentum dengan koefisien suku ruas kiri persamaan, yang menjelaskan efek inersia. Oleh karena itu, *Re* adalah rasio dari suku inersia terhadap suku viskos. Dengan kata lain, *Re* menjelaskan perbandingan efek inersia terhadap efek viskos. Dengan alasan yang sama, arti fisik dari *Fr* adalah perbandingan antara efek inersia dan gravitasi. Parameter *Fr* penting hanya untuk kasus dimana terdapat free-surface (seperti dalam kasus aliran pada permukaan air).

Dalam persamaan energi terdapat bilangan *Pr*. Arti dari bilangan ini adalah perbandingan efek difusivitas viskositas terhadap difusivitas termal. Dapat dilihat dari definisi di atas bahwa harga P_r tergantung dari jenis fluida dan tidak bergantung dari aliran. Sedangkan untuk parameter *Ec* biasanya diubah ke parameter lain seperti bilangan Mach, seperti yang akan ditunjukkan dalam paragraf di bawah.

Persamaan dasar fluida dalam bentuk nondimensional ini (persamaan $\left(\tilde{a}\right)$-persamaan$\left(\tilde{c}\right)$) sangat berguna dalam hal-hal berikut :

1. Menyederhanakan persamaan tersebut. Misalnya apabila aliran yang dipelajari mempunyai *Re* yang tinggi $\left(R_e \to \infty\right)$, maka dapat dilihat dari persamaan$\left(\tilde{b}\right)$, suku yang menjelaskan *viscous stress* dapat diabaikan. Juga karena *Pr* biasanya mempunyai

harga sekitar 1, maka suku yang menjelaskan konduksi panas dan *viscous dissipation* dapat diabaikan dalam persamaan $(\tilde{c})$.

2. Biasanya dalam melakukan eksperimen untuk mensimulasikan aliran di sekitar benda kita membuat model yang lebih kecil daripada dimensi benda yang sebenarnya. Persamaan $(\tilde{a})-(\tilde{c})$ memberitahu kita bahwa eksperimen dengan model yang lebih kecil ini akan berhasil mensimulasikan aliran dengan tepat apabila harga-harga parameter : $E_c, R_e, F_r, P_r, \& B_\beta$ adalah sama seperti pada aliran yang sebenarnya. Ini disebabkan variabel yang terdapat dalam persamaan $(\tilde{a})-(\tilde{c})$ tidak berdimensi. Jadi apabila ada dua persoalan (aliran disekitar benda dan aliran disekitar model), maka solusi dari persamaan $(\tilde{a})-(\tilde{c})$ untuk kedua aliran tersebut adalah sama apabila bentuk kedua permukaan benda tersebut sama dan harga dari parameter-parameter di atas mempunyai nilai yang sama.

Dalam aerodinamika biasanya kita mempelajari aliran udara. Udara dapat diasumsikan sebagai *perfect gas*. Untuk *perfect gas*, kita dapat menggunakan parameter lain yang lebih umum digunakan dalam aerodinamika seperti *M (Mach number).* Untuk perfect gas $C_{p_0} = \dfrac{\gamma_0 R}{\gamma_0 - 1}$ dan kecepatan suara (a_o) adalah $a_o = \gamma_0 R T_o$ sehingga bilangan Eckert menjadi,

$$E_c = \frac{u_0^2}{\gamma_0 R T_0}(\gamma_0 - 1) = (\gamma_0 - 1)\frac{u_0^2}{a_0^2} = (\gamma_0 - 1) M^2$$

, dimana $M = \dfrac{u_o}{a_0}$ adalah bilangan March. Dapat dilihat bahwa parameter-parameter non-dimensional atau “*Aerodynamics Similarity*” untuk *perfect gas* adalah : R_e, F_r, P_r, M_o, γ, dan B_β.

Berikutnya, kita akan nondimensionalkan persamaan keadaan $\rho = \rho(p, \mathrm{T})$. Pertama-tama, kita tuliskan diferensial dari ρ sehingga,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{\mathrm{T}}\frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\mathrm{P}}\frac{d\mathrm{T}}{dt}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \alpha\frac{dp}{dt} - \beta\frac{d\mathrm{T}}{dt}$$

dimana dari termodinamika kita ketahui bahwa β adalah *coefficient of thermal expansion* dan α adalah *isothermal compressibility*,

$$\alpha \equiv \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{\mathrm{T}}$$

Sekarang kita nondimensionalkan persamaan diatas. Untuk itu, kita tambahkan definisi baru,

$\tilde{\alpha} \equiv \alpha / \alpha_0$, $\tilde{\beta} \equiv \beta / \beta_0$.

Dengan menggunakan variabel-variabel tersebut, persamaan menjadi

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} = \alpha_0 \rho_0 u_o^2 \tilde{\alpha}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{t}} - \beta_o \mathrm{T}_0 \tilde{\beta}\frac{d\tilde{\mathrm{T}}}{d\tilde{t}}$$

Berikutnya kita perkenalkan *specific heat ratio* $\gamma \equiv C_P / C_V$. Karena,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\right)_{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial s}{\partial \mathrm{T}}\right)_{\rho}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \rho}\right)_{s} = -1 .$$

maka,

$$C_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\rho} = -T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_T$$

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = -T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$$

sehingga,

$$\gamma = \frac{-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T}{-T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_T} = \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}_{a^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = a^2 \rho \alpha$$

Dengan demikian maka,

$$\alpha_o = \frac{\gamma_o}{\rho_o a_o^2}$$

Akhirnya, apabila kita kembali ke persamaan untuk $\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}}$,

$$\boxed{\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} = \gamma_0 M^2 \tilde{\alpha}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{t}} - B_{\beta}\tilde{\beta}\frac{d\tilde{\mathrm{T}}}{d\tilde{t}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\tilde{d})$$

Persamaan terakhir adalah persamaan keadaan dalam bentuk non-dimensional.

Selain bilangan-bilangan yang sudah dibahas, ada beberapa bilangan lain yang juga merupakan parameter penting dalam mekanika fluida. Untuk beberapa kasus *unsteady*, seperti dalam kasus aliran viskos di sekitar silinder, terdapat waktu/frekuensi karakteristik T_o atau f_o. Untuk kasus ini, parameter non-dimensional untuk waktu perlu diubah menjadi $\tilde{t} \equiv \frac{t}{t_0}$. Apabila kita lakukan prosudur yang sama seperti sebelumnya, maka akan didapatkan koefisien baru di depan suku *unsteady* ($\frac{\partial}{\partial t}$) dalam persamaan-persamaan di atas. Koefisien baru ini dikenal dengan sebutan bilangan *Strouhal*,

$$S_t \equiv \frac{T_o u_o}{L_o} = \frac{u_o}{f_o L_o}$$

Parameter ini sangat penting untuk kasus aliran yang mempunyai karakteristik frekuensi/waktu.

Berikutnya adalah kasus aliran kecepatan rendah dimana efek gravitasi sebanding dengan efek inersia dan viskos. Untuk kasus ini,

$$\rho \approx \rho_o \left(1 - \beta \Delta \mathrm{T}\right)$$

Untuk kasus ini karena suku inersia sebanding dengan suku viskos. Selain itu dalam kasus ini aliran disebabkan karena adanya perbedaan antara temperatur suatu permukaan dengan temperatur fluida, sehingga terdapat parameter baru yaitu temperature permukaan (T_w). Oleh karena itu, bentuk non-dimensional yang tepat untuk kecepatan dan temperature adalah dalam kasus ini adalah,

$$\underline{\tilde{u}} \approx \frac{\underline{u}}{\frac{\mu_o}{\rho_o L_o}} \qquad \tilde{T} = \frac{T - T_o}{T_w - T_o}$$

Apabila kita lakukan prosudur yang sama seperti sebelumnya, maka kita akan mendapatkan koefisien baru pengganti F_r di depan suku berat gravitasi dalam persamaan momentum. Koefisien ini adalah bilangan *Grashof* (G_r),

$$G_r = \frac{\rho_o^2 g \beta_o L_o^3 \left(T_w - T_o\right)}{\mu_o^2}$$

Bilangan *Grashof* merupakan parameter penting dalam perpindahan panas, khususnya kasus konveksi bebas.

3.1.1 Kondisi Batas Non-dimensional

Pembicaraan kita tentang bentuk non-dimensional belum lengkap sebelum kita non-dimensionalkan kondisi batas. Di dekat permukaan terdapat parameter baru yaitu temperatur permukaan atau T_w. Untuk itu, kita perlu mengubah bentuk non-dimensional termperatur menjadi,

$$\tilde{T} \equiv \frac{T - T_o}{T_w - T_o}$$

Dengan bentuk baru ini maka bentuk non-dimensional kondisi batas menjadi,

$$\boxed{\tilde{u} = 1, \qquad \tilde{T} = 1 \qquad atau \qquad \tilde{k}\frac{\partial T}{\partial n} = N_u} \qquad \text{di permukaan.}$$

Dapat dilihat bahwa prosudur ini menghasilkan satu lagi bilangan non-dimensional, yaitu bilangan Nusselt (N_u)

$$N_u \equiv \frac{q_w}{k_o\left(T_w - T_o\right)}$$

Bilangan Nu adalah parameter yang penting dalam permasalahan perpindahan panas, khususnya pada kasus konveksi.

1.5 Asumsi – asumsi yang Sering Digunakan

Telah kita saksikan bahwa persamaan–persamaan dasar fluida adalah persamaan–persamaan yang sangat kompleks. Persamaan momentum, misalnya adalah persamaan diferensial yang nonlinier. Oleh karena itu persamaan tersebut sangat sulit untuk diselesaikan secara analitik. Apabila kita ingin menyelesaikan persamaan–persamaan tersebut. Secara analitik maka kita harus menyederhanakan persamaan–persamaan tersebut dengan mengasumsikan sesuatu. Berikut ini adalah asumsi-asumsi yang sering digunakan.

2.6.1 Steady :

Asumsi ini menyatakan bahwa variabel–variabel aliran ($\rho, \underline{u}, e, p, T, dll$) di setiap titik dalam aliran tidak berubah dengan waktu sehingga $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Perlu diingatkan asumsi ini <u>tidak menyatakan bahwa $\frac{d}{dt} = 0$.</u>

2.6.2 Inviscid :

Asumsi ini menyatakan bahwa suku yang menjelaskan efek viskos dalam persamaan–persamaan dapat diabaikan. Asumsi ini dapat digunakan apabila *Re* sangat tinggi. Untuk kasus *Re* tinggi apabila kita lihat persamaan ($\tilde{b}$) & ($\tilde{c}$) maka suku-suku

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{\underline{\tau}}} \;\; \& \;\; \frac{Ec}{\mathrm{Re}} (\tilde{\underline{\underline{\tau}}} \cdot \tilde{\nabla}) \cdot \tilde{\underline{u}}$$

, (Pr ~ 1) menjadi sangat kecil & dapat diabaikan . Selain itu apabila harga *Re* cukup tinggi, suku–suku dalam persamaan ($\tilde{c}$) , yaitu $\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{q}})$ menjadi sangat kecil & dapat diabaikan (karena Pr ~ 1). Karena $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}(\nabla u)$ dan $\underline{q} = \underline{q}(\nabla T)$ maka asumsi ini tidak dapat digunakan di daerah di mana terdapat $\nabla \underline{u}$ dan ∇T yang tinggi seperti daerah di dekat permukaan benda & dalam s*hockwave*.

Untuk aliran *inviscid*, persamaan momentum dan energi menjadi jauh lebih sederhana,

$$\boxed{\rho \frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla p + \rho \underline{G}} \qquad \text{(persamaan Euler)}$$

$$\boxed{\rho \frac{d}{dt}(e + \frac{u^2}{2}) = \rho(\underline{G} \cdot \underline{u} + Q) - \nabla \cdot (p\underline{u})}$$

Apabila kita bandingkan dengan persamaan umum untuk momentum persamaan Euler adalah satu orde (di $\underline{x}$) lebih rendah. Oleh karena itu persamaan ini <u>tidak memenuhi</u> kondisi batas (*boundary condition)* $\underline{u}(\underline{x} = \underline{x}_{wall}, t) = \underline{U}_{wall}$. Kondisi batas kondisi batas yang harus dipenuhi oleh persamaan Euler hanyalah sebagian dari kondisi batas yang dipenuhi oleh persamaan Navier-stokes, yaitu

$$\boxed{\underline{u}(\underline{x} = \underline{x}_{wall}, t) \cdot \hat{n} = \underline{U}_{wall} \cdot \hat{n}}.$$

Sedangkan, kondisi batas lainnya yang menyatakan bahwa kecepatan aliran fluida didekat permukaan benda yang mempunyai arah sejajar dengan permukaan benda haruslah sama dengan kecepatan benda diarah tersebut tidak dapat dipenuhi. Dengan kata lain, perbedaan kecepatan tangensial antara benda dan fluida didekat benda tersebut (kondisi *slip*) diperbolehkan dalam aliran inviscid.

2.6.3 Adiabatik:

Asumsi ini menyatakan bahwa tidak ada panas yang masuk kedalam sistem. Dengan demikian maka suku yang menjelaskan radiasi termal (ρQ) dapat diabaikan dalam persamaan energi. Selain itu asumsi ini juga berarti bahwa transfer panas dibatas-batas fluida juga dapat diabaikan ($\underline{q} \cdot \hat{n} = 0$).

2.6.4 Isentropik:

Asumsi isentropic menyatakan bahwa aliran fluida adalah aliran yang *inviscid* & *adiabatic*. Sehingga, untuk aliran *isentropic* persamaan (d) menjadi,

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 0 \textbf{ atau } \frac{ds}{dt} = 0$$

Persamaan ini dapat digunakan untuk menggantikan persamaan energi dalam aliran *isentropic*. Persamaan ini menyatakan bahwa entropi dari "*fluid element*" adalah konstan sepanjang pergerakannya. Selain bentuk di atas, alternatif dari persamaan energi adalah persamaan (g), dengan mengabaikan suku-suku yang relevan dengan asumsi ini sehingga

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}}$$

2.6.5 Konstan S (Homentropik):

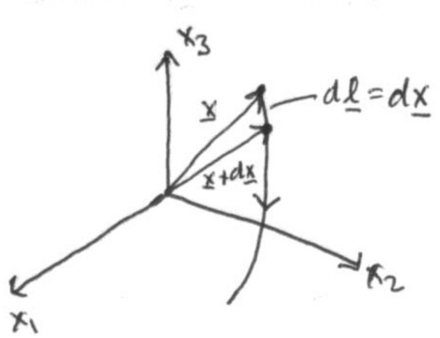
Asumsi ini menyatakan bahwa entropi (s) adalah kontan di mana pun sehingga $\nabla s = 0$. Karena $dh = \mathrm{Tds} + \frac{1}{\rho} dp$ maka $\nabla h = T\nabla s + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\nabla p; (T\nabla s = 0)$.

Dengan demikian untuk aliran ini persamaaan momentum menjadi,

$$\boxed{\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \underline{G} = -\nabla h + \underline{G}}$$

Asumsi ini digunakan apabila entropi setiap fluid element mempunyai harga yang sama pada daerah asal aliran (aliran dengan freestream yang seragam, misalnya) dan aliran juga dapat diasumsikan sebagai aliran *isentropic*. Untuk aliran yang homentropik ada sebuah teorema yang sangat berguna yaitu “Kelvin's Theorem”. Untuk mendapatkan teorema ini kita mulai dari definisi “Circulation”(Γ).

$\Gamma = \oint \underline{u} \cdot d\underline{l}$ di mana lintasan dalam integral adalah lintasan di dalam fluida. Sekarang kita lihat turunan material dari Γ,



$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint \underline{u} \cdot d\underline{l} = \oint\left(\frac{du}{dt} \cdot d\underline{l} + \underline{u} \cdot \frac{d}{dt}(d\underline{l})\right).$$

Apabila kita perhatikan sketsa di sebelah dan ingat bahwa $d\underline{l}$ berada dalam fluida maka,

$$\frac{d}{dt}(d\underline{l}) = d(\frac{d\underline{l}}{dt}) = d(\frac{d\underline{l}}{dt}) = d(\frac{d\underline{x}}{dt}) = d\underline{u}$$

Dengan demikian maka,

$\oint \underline{u} \cdot \frac{d}{dt}(d\underline{l}) = \oint \underline{u} \cdot d\underline{u} = \oint d\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$, karena integral tertutup dari sebuah *total differential* adalah nol. Oleh karena itu maka persamaaan untuk $\frac{d\Gamma}{dt}$ menjadi,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{du}{dt} \cdot d\underline{l} = \int_s \nabla \times \left(\frac{d\underline{u}}{dt}\right) \cdot \hat{n}\, ds$$

di mana persamaaan ini didapatkan dengan menggunakan teorema Stokes untuk aliran yang <u>homentropik & $\underline{G}$ adalah gaya yang konservatif</u> ($\underline{G}$ = $-\nabla\psi$) sehingga

$\frac{d\underline{u}}{dt} = -\nabla h + \underline{G} = -\nabla(h+\psi) \equiv -\nabla(\bar{h})$. Dengan demikian maka $\frac{d\Gamma}{dt} = -\int \nabla \times (\nabla \bar{h}) \cdot \hat{n}\, ds = 0$, karena $\nabla \times \nabla A = 0$ untuk setiap skalar A. Jadi kita telah dapatkan sebuah teorema

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \qquad \text{(Teorema Kelvin).}$$

Sekali lagi lintasan dalam definisi Γ adalah lintasan di dalam fluida & daerah di dalam lintasan tersebut hanya terdapat fluida (tidak ada benda lain). Apabila kita lihat definisi dari Γ & kita gunakan *Stokes Theorem* maka,

$$\Gamma \equiv \oint \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int_s (\nabla \times \underline{u}) \cdot \hat{u} ds = \int_s \underline{w} \cdot \hat{n} ds$$

Jadi pengertian dari teorema Kelvin adalah sebagai berikut. Apabila kita ikuti sebuah kontur tertutup yang di dalamnya hanya berisi fluida & pada awalnya fluida tersebut tidak mempunyai vortisitas, maka bagian–bagian dalam fluida tersebut tidak akan mempunyai vortisitas seterusnya (apabila aliran fluida tersebut diasumsikan sebagai aliran homentropik & $\underline{G}$ adalah konservatif).

Kegunaan teorema ini adalah dalam mempelajari aliran *uniform* yang melewati sebuah benda. Karena aliran jauh didepan benda tersebut adalah seragam maka aliran tersebut tidak mempunyai $\underline{\omega}$ pada awalnya. Jadi menurut teorema Kelvin pada saat bagian dari fluida tersebut melewati benda maka $\underline{\omega}$ – nya tetap nol & fluida tetap tidak mempunyai $\underline{\omega}$. Kondisi $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = 0$ dapat digunakan untuk mengganti persamaan momentum untuk kasus– asus seperti ini. Teorema ini juga membawa kita kepada asumsi selanjutnya yaitu asumsi irrotasional.

Persamaan momentum untuk aliran yang homentropik dapat dituliskan seperti di bawah ini dengan menggunakan *vector identity*:

$$\boxed{\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = \underline{\omega} \times \underline{u} + \nabla \frac{u^2}{2}} \qquad (****)$$

Dengan identitas ini maka persamaaan momentum untuk aliran homentropik & $\underline{G}$ yang konservatif menjadi,

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{\omega} \times \underline{u} = -\nabla\left(h + \frac{u^2}{2} + \Psi\right) \qquad \text{(R)}$$

<u>Aliran steady homentropik ($\underline{\omega} \neq 0$)</u>

Untuk aliran yang *steady* maka persamaan (R) menjadi, $\underline{\omega} \times \underline{u} = -\nabla(h + \frac{u^2}{2} + \Psi)$

Sekarang kita ambil *dot product* persamaan di atas dengan <u>u</u>,

$$\underline{u} \cdot (\underline{\omega} \times \underline{u}) = -\underline{u} \cdot \nabla\left(h + \frac{u^2}{2} + \Psi\right)$$

Karena $\underline{u}$ tegak lurus dengan $\underline{\omega} \times \underline{u}$ maka, $0 = -\underline{u} \cdot \nabla(h + \frac{u^2}{2} + \Psi)$

Sekarang kita definisikan *unit vector* $\hat{\ell}$ sebagai $\hat{\ell} \equiv \frac{u}{\|\nabla \underline{u}\|}$

Dengan definisi ini maka, $0 = \hat{\ell} \cdot \nabla(h + \frac{u^2}{2} + \Psi) = \frac{\partial}{\partial \ell}(h + \frac{u^2}{2} + \Psi)$

Tetapi $\hat{\ell}$ adalah *unit vector* yang menunjukkan arah *streamline* (lihat definisi $\hat{\ell}$).
Maka persamaan di atas menjadi,

$$\boxed{h + \frac{u^2}{2} + \Psi \equiv \mathrm{H}} = \text{konstan sepanjang } \textit{streamline} \qquad \text{(Bernoulli Eqn)}$$

Persamaan Bernoulli di atas adalah persamaan Bernoulli yang lebih umum dari persamaan Bernoulli untuk aliran inkompresibel yang kita kenal selama ini. Kita dapat menggunakan persamaan di atas untuk mendapatkan persamaan Bernoulli untuk kasus inkompresibel seperti yang dilakukan di bawah ini. Dari termodinamika, $\frac{de}{dt} = \mathrm{T}\frac{ds}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ Karena $\frac{ds}{dt} = 0$ dan persamaan kontinuitas maka $\frac{de}{dt} = \frac{p}{\rho}(\nabla \cdot \underline{u})$. Untuk kasus inkompresibel, $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ sehingga $\frac{de}{dt} = 0$ atau e adalah konstan sepanjang *streamline*. Karena $h = e + \frac{p}{\rho} =$(konstan sepanjang *streamline*) $+ \frac{p}{\rho}$ maka persamaan Bernoulli di atas menjadi, $\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \Psi =$ konstan sepanjang *streamline*. Persamaan di atas adalah persamaan Bernoulli yang kalian kenal selama ini.

2.6.6 Aliran Irotasional (aliran potensial)

Asumsi irotasional menyatakan bahwa $\underline{\omega} = 0$. Dari pembahasan di 2.6.5 dapat dilihat bahwa asumsi ini berlaku apabila aliran dapat diasumsikan sebagai aliran homentropik dan tidak mempunyai vortisitas pada daerah asal aliran (freestream yang seragam, misalnya). Dengan kata lain aliran irotasional pasti aliran homentropik tetapi aliran homentropik belum tentu aliran irotasional. Karena aliran irotasional pastilah aliran yang homentropik maka asumsi irotasional hanya dapat digunakan dalam kasus *Re* yang tinggi dan setiap *fluid element* mempunyai harga entropi yang seragam pada daerah asal aliran.

Sekarang kita akan gunakan persamaan (R) utk mendapatkan persamaan energi untuk aliran irotational dan membandingkannya dengan persamaan serupa untuk kasus aliran steady homentropik, yang secara umum adalah rotasional.

Karena $\underline{\omega} = 0 = \nabla \times \underline{u}$ & untuk setiap skalar ϕ, $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ maka untuk aliran irrotational $\underline{u}$ dapat dinyatakan sebagai $\underline{u} = \nabla \phi$ dimana ϕ disebut “potensial”. Dengan definisi $\underline{u}$ ini maka persamaan (R) menjadi,

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + h + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \Psi\right) = 0$$

$$\text{sehingga, } \frac{\partial \phi}{\partial t} + h + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \Psi = f(t)$$

Fungsi *f(t)* dapat kita masukkan ke dalam ϕ karena apabila kita redefinisikan, $\phi^{''} = \phi + f(t)$ maka $\underline{u}^{'} = \nabla \phi^{'} = \nabla \phi = \underline{u}$. Jadi persamaan diatas menjadi

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + h + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \Psi = \text{konstan di manapun didalam fluida}}$$

Persamaan di atas adalah persamaan energi untuk aliran irrotational atau dikenal juga dengan “aliran potensial”. Sekilas persamaan di atas sama dengan persamaan energi untuk aliran steady homentropik (persamaan Bernoulli). Namun, konstan di sebelah kanan dari kedua persamaan tersebut berbeda. Dalam kasus irotational konstan tersebut adalah konstan dimanapun!!!. Sedangkan dalam kasus aliran steady homentropik (rotasional) konstan tersebut hanyalah konstan sepanjang *streamline*.

2.6.7 Aliran inkompresibel

Dalam mekanika fluida, seringkali digunakan asumsi inkompresibel. Asumsi ini menyatakan bahwa perubahan massa jenis terhadap waktu dari sebuah *fluid element* adalah nol (massa jenis setiap *fluid element* adalah konstan selama pergerakannya). Secara matematis, asumsi ini dapat dinyatakan seperti,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ atau } \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

di mana versi sebelah kanan diambil dengan memanfaatkan hukum kekekalan massa (kontinuitas).

Untuk melihat kapan asumsi ini bisa digunakan, kita kembali ke persamaan keadaan dalam bentuk nondimensional $\left(\tilde{d}\right)$

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{t}} = \gamma_0 M^2 \tilde{\alpha}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{t}} - B_\beta \tilde{\beta}\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}}$$

Dari persamaan di atas, dapat dilihat bahwa asumsi inkompresibel terpenuhi dalam kasus *isotermal* (temperatur adalah konstan) apabila $M^2 << 1$ (bilangan Mach dari aliran sangat rendah). Dari definisi bilangan Mach, maka jelaslah bahwa asumsi ini terpenuhi apabila harga a_0 sangat tinggi. Karena, $a_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ maka harga a_0 akan tinggi apabila *perubahan massa jenis yang disebabkan oleh perubahan tekanan sangatlah kecil*.

Selain itu, syarat $M^2 << 1$ khusus untuk aliran *unsteady* juga berarti bahwa waktu yang dibutuhkan untuk perubahan signifikan dalam aliran adalah relatif jauh lebih lama dibandingkan dengan waktu yang dibutuhkan oleh kecepatan suara untuk merambat sejauh karakteristik panjang.

Untuk aliran inkompresibel yang isotermal, k = konstan dan μ = konstan. Apabila asumsi ini dapat digunakan, maka persamaan-persamaan fluida menjadi lebih sederhana. Persamaan-persamaan (a) dan (b) untuk kasus inkompresibel adalah:

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0} \qquad \text{(I.1)}$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \underline{G} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

di mana $\underline{\underline{\tau}} = \lambda \underline{\underline{I}}\left(\nabla \cdot \underline{u}\right) + \mu\left(\nabla \underline{u} + \left(\nabla \underline{u}\right)^T\right)$.

Karena (I.1), maka $\underline{\underline{\tau}}$ menjadi,

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu\left(\nabla \underline{u} + \left(\nabla \underline{u}\right)^T\right)$$

sehingga

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \mu\left(\nabla^2 \underline{u} + \nabla\left(\underbrace{\nabla \cdot \underline{u}}_{=0}\right)\right) = \mu \nabla^2 \underline{u}\,.$$

Substitusikan ke persamaan momentum maka,

$$\boxed{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}.\nabla \underline{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \underline{G} + \nu \nabla^2 \underline{u}} \qquad \text{(I.2)}$$

di mana $\nu \equiv \dfrac{\mu}{\rho}$.

Karena ρ adalah konstan, maka untuk kasus ini yang tidak diketahui adalah u_1, u_2, u_3 dan p. Sedangkan ρ, $\underline{G}$, $\mu(\nu)$ diketahui. Jadi persamaan (I.1) dan (I.2) (4 persamaan) adalah persamaan yang harus diselesaikan untuk mendapatkan u_1, u_2, u_3 dan p. Dengan kata lain, persamaan energi biasanya tidak dibutuhkan untuk menyelesaikan kasus inkompresibel. Persamaan energi hanya dibutuhkan dalam kasus aliran yang dipanaskan secara tidak seragam misalnya dan kasus-kasus aliran dengan perpindahan panas.

1.6 Garis-garis aliran

Pemahaman secara fisis dari solusi persamaan-persamaan dasar bisasanya dilakukan dengan bantuan garis-garis aliran. Selain membantu memahami fisik aliran, garis-garis aliran juga sangat berguna dalam visualisasi eksperimen. Secara umum terdapat 3 tipe garis-garis aliran yang biasa digunakan. Ketiga tipe ini adalah “streamline” (garis arus), “pathline”(jejak arus) dan “streakline”. Di subbagian ini kita akan bahas ketiga garis-garis aliran ini satu persatu.

2.7.1 Streamline

Streamline adalah garis-garis yang di mana pun sejajar dengan vektor kecepatan. Konsep streamline sangat berguna untuk memahami fisik dari aliran steady. Konsep ini tidak terlalu berguna dalam aliran unsteady karena vektor-vektor kecepatan berubah-ubah setiap saat.
Dari penjelasan di atas, streamline $d\underline{l}$ didapatkan dengan mengevaluasi

$$\boxed{\underline{u} \times d\underline{l} = 0}.$$

Apabila kita gunakan koordinat kartesian maka persamaan di atas menjadi,

$$u_2 dx_3 - u_3 dx_2 = 0\,,\; u_3 dx_1 - u_1 dx_3 = 0\,,\; u_1 dx_2 - u_2 dx_1 = 0$$

atau

$$\frac{u_1}{dx_1} = \frac{u_2}{dx_2} = \frac{u_3}{dx_3} \equiv \frac{1}{ds}$$

di mana s adalah parameter yang diperkenalkan untuk memudahkan integrasi persamaan di atas. Solusi dari persamaan di atas untuk streamline yang melewati titik $\underline{x} = \underline{x}_0$ pada waktu $t = 0$ mepunyai bentuk

$$\underline{x} = \underline{x}\left(\underline{x}_0, t, s\right)$$

2.7.2 Pathline

Pathline adalah garis yang menjelaskan jejak dari <u>sebuah partikel fluida</u>. Karena partikel fluida bergerak bersama fluida yang mempunyai kecepatan $\underline{u}$, maka pathline haruslah memenuhi

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{u}\ .$$

Persamaan untuk pathline yang melintasi titik $\underline{x}_0$ pada waktu t_0 adalah solusi persamaan di atas yang memenuhi kondisi awal $\underline{x}_{(t=0)} = \underline{x}_0$. Secara umum solusi ini mempunyai bentuk

$$\underline{x} = \underline{x}\left(\underline{x}_0, t\right)$$

2.7.3 Streakline

Streakline adalah garis yangmenjelaskan jejak dari partikel-partikel fluida yang melewati sebuah titik $\underline{x}_0$ pada waktu $t = \tau$ (setiap partikel melewati titik ini pada waktu yang berbeda). Dengan demikian persamaan untuk streakline didapatkan dengan menyelesaikan persamaan

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{u},\ \underline{x}_{(t=\tau)} = \underline{x}_0 .$$

Streakline adalah garis yang terlihat apabila kita melakukan visualisasi aliran dengan menggunakan asap atau “dye”

Catatan: Untuk kasus steady, streamline, pathline, dan streakline menghasilkan garis-garis yang sama.

Contoh: Aliran 2-D (unsteady) yang mempunyai kecepatan

$$u_1 = x_1(1+2t)$$
$$u_2 = x_2$$
$$u_3 = 0$$

yang melewati titik (1,1)

a. Streamline pada waktu $t = 0$

$$\frac{dx_1}{ds} = u_1,\ \frac{dx_2}{ds} = u_2$$

substitusikan u_1 dan u_2 ($t = 0$)kemudian integrasikan didapatkan

$$x_1 = e^s \text{ dan } x_2 = e^s$$

sehingga persamaan untuk streamline adalah $\boxed{x_1 = x_2}$

b. Pathline pada waktu $t = 0$

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1,\ \frac{dx_2}{dt} = u_2$$

$$x_1 = c_1 e^{t(1+t)},\ x_2 = c_2 e^t$$

Apabila partikel fluida ini melewati (1,1) pada $t = 0$ maka, $c_1 = c_2 = 1$

$$x_1 = e^{t(1+t)},\ x_2 = e^t$$

Sehingga persamaan untuk pathline adalah,

$$x_1 = x_2^{1+\ln x_2}$$

c. Streakline pada waktu $t = \tau$

Untuk kasus ini kondisi awalnya adalah

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, pada waktu $t = \tau$

hasilnya adalah,

$x_1 = e^{-t(1+t)-\tau(1+\tau)}$ dan $x_2 = e^{t-\tau}$ yang pada waktu $t = 0$ menjadi $x_1 = x_2^{1-\ln x_2}$

2.8 Aliran 2-D dan Fungsi Arus (stream function)

Untuk kasus aliran 2-D, persamaan kontinuitas dapat dituliskan menjadi,

$$\frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} = 0$$

Persamaan ini akan selalu terpenuhi apabila kita definisikan

$$\rho u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \text{ dan } \rho u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \qquad \text{(SF)}$$

$\psi(x_1, x_2)$ disebut "fungsi arus " atau "*stream function*" dan fungsi ini sangat membantu kita dalam menyelesaikan permasalahan aliran 2D.

Untuk kasus aliran incompressible, persamaan kontinuitas menjadi,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 .$$

Untuk kasus ini fungsi arus didefinisikan sebagai,

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \text{ dan } u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

Persamaan "momentum" (I.4) dapat kita manipulasi untuk mendapatkan persamaan diferensial untuk ψ karena,

$$\nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{u}) = \underline{\omega} \underbrace{(\nabla \cdot \underline{u})}_{=0} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \nabla)\underline{u} - \underline{u}\left(\underbrace{\nabla \cdot \underline{\omega}}_{=0}\right)$$

maka persamaan (I.4) menjadi,

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{\omega} - (\underline{\omega} \cdot \nabla)\underline{u} = \nu \nabla^2 \underline{\omega} .$$

Karena $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$ maka persamaan di atas hanya terdapat satu variabel yaitu $\underline{u}$. Sekarang kita substitusikan (SF) untuk $\underline{u}$ di dalam persamaan di atas dan hasilnya adalah,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\nabla^2\psi\right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nabla^2\psi\right) - \nu\nabla^4\psi = 0} \qquad \text{(SF 2)}$$

Dari persamaan terakhir terlihat bahwa apabila kita mempelajari kasus aliran 2D dan kita gunakan fungsi arus, kita tidak perlu bersusah-payah untuk menyelesaikan persamaan kontinuitas dan cukup menyelesaikan persamaan (SF 2) untuk satu variable, yaitu ψ. Ini tentunya disebabkan oleh definisi dari fungsi arus yang secara otomatis telah memenuhi persamaan kontinuitas.

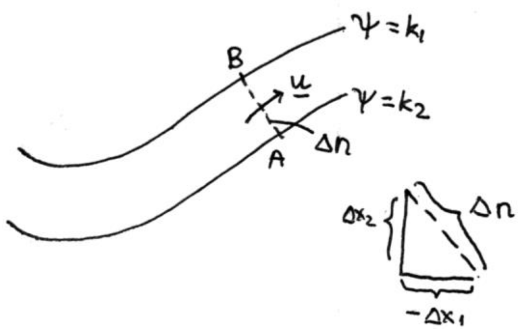
Sekarang kita akan melihat lebih dalam arti fisik dari fungsi arus. Pertama-tama, streamline untuk aliran steady dapat ditemukan dengan menggunakan ψ. Definisi stream line adalah garis yang paralel dengan $\underline{u}$ atau $d\underline{l} \times \underline{u} = 0$. Untuk aliran 2-D persamaan $d\underline{l} \times \underline{u} = 0$ menjadi ($d\underline{l} = dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2$),

$$u_2 dx_1 - u_1 dx_2 = 0$$

Substitusikan (SF) untuk u_1 dan u_2,

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x_1}dx_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}dx_2 = 0 \text{ atau } d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa ψ = konstan adalah kurva-kurva yang menjelaskan streamline.



Sekarang kita akan hitung "mass flux" Q yang melintasi 2 streamline seperti dalam sketsa di atas.

$$Q = \rho\int_A^B (\underline{u}.\hat{n})dl = \rho\int(-u_2 dx_1 + u_1 dx_2) = \rho\int_A^B d\psi$$

$$Q = \rho(\psi_B - \psi_A)$$

Jadi selisih dari harga ψ antara 2 streamline proporsional dengan “mass flux” Q yang melewati kedua streamline tersebut.